اکسترمم‌های تابع

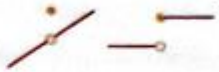
یکنوایی

- در یک بازه از دامنهٔ f ، اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد $(f'(x) > 0)$ ، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.
- در یک بازه از دامنهٔ f ، اگر مقدار f' موجود و منفی باشد $(f'(x) < 0)$ ، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً نزولی است.
- در یک بازه از دامنهٔ f ، اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد $(f'(x) = 0)$ ، آن‌گاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

نقاط بحرانی: نقاطی از دامنهٔ تابع f هستند (c) که مشتق در آن‌ها یا برابر صفر است یا وجود ندارد.

- ۱ $f'(c)=0$:

- ۲ $f'(c)$ وجود ندارد
  - ناپیوسته باشد



  - مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نباشند.

  - تابع در آن نقطه مماس قائم داشته باشد.

نقاط اکسترمم

- **مشتق‌پذیر**
  - **نسبی**
    - **max:** اگر تغییر علامت تابع f' به شکل

x		c	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

باشد، که $x=c$ در آن ریشهٔ سادهٔ مشتق است، $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

    - **min:** اگر تغییر علامت تابع f' به شکل

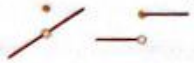
x		c	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

باشد، که $x=c$ در آن ریشهٔ سادهٔ مشتق است، $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.
  - **مطلق:** نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم و مقدار تابع را در نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم. بیشترین مقدار به دست آمده، max مطلق و کمترین مقدار به دست آمده، min مطلق است.
- **مشتق‌ناپذیر:** بهترین راه تشخیص نوع اکسترمم در توابع مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار آن‌ها است.

نقاط بحرانی: نقاطی از دامنهٔ تابع f هستند (c) که مشتق در آن‌ها یا برابر صفر است یا وجود ندارد.

- ۱ $f'(c)=0$:

- ۲ $f'(c)$ وجود ندارد
  - ناپیوسته باشد



  - مشتق‌های چپ و راست با هم برابر نباشند.

  - تابع در آن نقطه مماس قائم داشته باشد.

نقاط اکسترمم

- **مشتق‌پذیر**
  - **نسبی**
    - **max:** اگر تغییر علامت تابع f' به شکل

x		c	
f'	+		−
f	↗		↘

باشد، که $x=c$ در آن ریشهٔ سادهٔ مشتق است، $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

    - **min:** اگر تغییر علامت تابع f' به شکل

x		c	
f'	−		+
f	↘		↗

باشد، که $x=c$ در آن ریشهٔ سادهٔ مشتق است، $x=c$ طول نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f است.
  - **مطلق:** نقاط بحرانی تابع f را پیدا می‌کنیم و مقدار تابع را در نقاط بحرانی محاسبه می‌کنیم. بیشترین مقدار به دست آمده، max مطلق و کمترین مقدار به دست آمده، min مطلق است.
- **مشتق‌ناپذیر:** بهترین راه تشخیص نوع اکسترمم در توابع مشتق‌ناپذیر، رسم نمودار آن‌ها است.

$-1 \quad 1$

$+ \; -1 \; - \; 1 \; +$

$y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- تابع $f(x) = x^3 - 3x$ در بازهٔ $(-1, 1)$ اکیداً صعودی است. نادرست
- تابع f در نقاط بحرانی مشتق ندارد. نادرست
- در هر نقطهٔ بحرانی، مشتق تابع برابر صفر است. نادرست
- هر نقطهٔ بحرانی، یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است.
- هر نقطهٔ دلخواه از دامنهٔ تابع ثابت، یک نقطهٔ بحرانی است. درست
- هر نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع، یک نقطهٔ بحرانی آن تابع است. درست
- اگر تابع f در $x = a$ ماکزیمم نسبی داشته باشد، آن‌گاه $f'(a) = 0$. نادرست
- در هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، مشتق برابر صفر است. نادرست
- برای تابع $f(x) = (x-1)^3$، نقطه‌ای به طول $x = 1$، هم نقطهٔ بحرانی و هم نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است. نادرست
- اگر c نقطهٔ اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه خط مماس بر منحنی در c افقی است. درست
- هر نقطهٔ اکسترمم نسبی، یک نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع است. نادرست
- هر نقطهٔ اکسترمم مطلق، یک نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع است. نادرست
- اگر $x = a$ طول نقطهٔ اکسترمم مطلق تابع f باشد، آن‌گاه $x = a$ طول نقطهٔ بحرانی است. درست
- اگر تابع f در بازهٔ $[a, b]$ پیوسته باشد، در این بازه، هم مینیمم مطلق و هم ماکزیمم مطلق دارد. درست
- مقدار مینیمم مطلق تابع $y = \tan x$ در بازهٔ $[0, \frac{\pi}{2})$، برابر صفر است. درست

جاهای خالی را با کلمات یا اعداد مناسب پر کنید.

. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=x^{۳}-۳x$ در آن اکیداً نزولی است، برابر ..... است.

. در یک بازه از دامنهٔ f ، اگر f' موجود و مثبت باشد، آن‌گاه f در این بازه ..... است.

. بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در آن اکیداً نزولی است، بازهٔ ..... است.

اگر $c\in D_f$ و $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ موجود نباشد، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ..... تابع f است.

. نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=x^{۲}-۱$ ، برابر ..... است.

طول نقطه‌های بحرانی تابع $f(x)=۲x^{۳}-۶x+۱$ ، برابر ..... است.

. طول نقطهٔ بحرانی تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ ، برابر ..... است.

تابع $f(x)=x+|x|$ روی بازهٔ $[-۱,۲]$ دارای ..... نقطهٔ بحرانی است.

اگر تابع f در $x=۲$ دارای مینیمم نسبی و $f'(۲)$ موجود باشد، آن‌گاه مقدار $f'(۲)$ برابر ..... است.

با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x)=x^3-12x+4$ ، مشخص کنید تابع در چه بازه‌هایی صعودی اکید است.

$y'=3x^2-12=0 \rightarrow x=\pm 2$

x		-2		2	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗ صعودی		↘ نزولی		↗ صعودی

. بزرگ‌ترین بازه از $\mathbb{R}$ را که تابع $f(x)=x^{۳}-۱۲x+۵$ در آن نزولی اکید باشد، مشخص کنید.

$f'(x)=۳x^{۲}-۱۲$

. توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید هستند؟

الف) $f(x) = -x^{۲} + x - ۳$

ب) $f(x) = x^{۳} - ۳x$

پ) $f(x) = \frac{۱}{x^{۲}+۱}$

$y' = \frac{-۲x}{(x^۲+۱)^۲} = ۰$

x	$-\infty$		۰	
y'		+		−
y		↗		↘

نقاط بحرانی توابع زیر را درصورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=-x^3+3x+1$

ب) $f(x)=x^3+x^2+x-2$

$\rightarrow y'=3x^2+2x+1=0$

$\Delta<0$

ریشه ندارد

بحرانی ندارد

پ) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

ت) $f(x)=\sqrt[3]{x}$

ث) $f(x)=\sqrt{x^2-4}+1$

$\rightarrow y'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}=0$

$x=0$

$x=\pm 2$ بحرانی

اگر $x=1$ و $x=2$ طول نقاط بحرانی تابع $y=2x^3+ax^2+bx+1$ باشند، مقادیر a و b را به دست آورید.

$y'=6x^2+2ax+b$

$6(x^2-3x+2)$

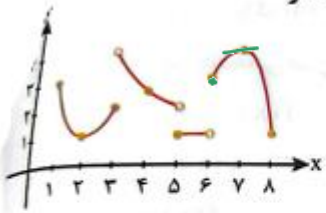
$2a=-18 \to a=-9$

$b=12$

$S=3$

$P=2$

نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است. مشخص کنید نقاط به طول‌های $x=1, x=2, \ldots, x=8$، کدام‌یک از ویژگی‌های مشخص‌شده در جدول را دارند.



طول نقطه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
min نسبی	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✗
max نسبی	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗
min مطلق	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓
max مطلق	✗	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗
بحرانی	✓	✓	✓	✗	✓	✓	✓	✓

ابتدا نقاط بحرانی توابع زیر را به دست آورید، سپس با رسم جدول تغییرات، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی توابع را در صورت وجود مشخص کنید.

الف) $f(x) = x^3 - 3x + 4$

ب) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 12x - 9$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 12 = 0$ $\quad a + c = b$ $\quad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -\frac{c}{a} = 2 \end{cases}$

x		-1		2	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	-16	$\nearrow$	11	$\searrow$
		Min		Max	

$-4 + 24 - 9$

$3 + 12 - 9$

اگر نقطهٔ (۲,۱) ، نقطهٔ اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x^3 + bx^2 + d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.

$1 = 8 + 4b + d$ $\quad y' = 3x^2 + 2bx = 0$

$0 = 12 + 4b \rightarrow b = -3$

مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص‌شده، در صورت وجود به دست آورید.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x \ ; \ x \in [-1, 3]$$

$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$x = 1$

$x = -2$ غ ق ق

x	-1	1	3
y	13	-7	45
		min مطلق	max مطلق

مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق توابع زیر را در بازه‌های مشخص‌شده، در صورت وجود به دست آورید.

الف) $x \in [-1, 2]$; $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

ب) $x \in [-2, 1]$; $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = 0 \rightarrow x = 0$

x	-1	0	2
y	$\sqrt{3}$	2	0

Max مطلق

Min مطلق

درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

.. در بین تمام مستطیل‌های با محیط ثابت ۲k ، مستطیلی بیشترین مساحت را دارد که طول و عرض آن، هم‌اندازه باشد.

.. اگر $x \cdot y = ۲۵$ و $x \cdot y > ۰$ ، آن‌گاه کمترین مقدار $x + y$ ، برابر ۱۰ است.

$P = xy \rightarrow P = x(x-4) = x^3 - 4x$

$P' = 3x - 4 = 0 \rightarrow x = 2$

جاهای خالی را با اعداد یا کلمات مناسب پر کنید.

$x - y = 4 \rightarrow y = x - 4$

. تفاضل دو عدد حقیقی ۴ است و حاصل‌ضرب آن‌ها کمترین مقدار ممکن است. این دو عدد ۲ و ۲- هستند.

اگر مجموع دو عدد صحیح برابر ۱۰ باشد، بیشترین مقدار حاصل‌ضرب آن‌ها برابر ۲۵ است.

اگر بین دو عدد حقیقی x و y ، رابطهٔ $5x - y = 10$ برقرار باشد، مقادیر x و y را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب این دو عدد مینیمم

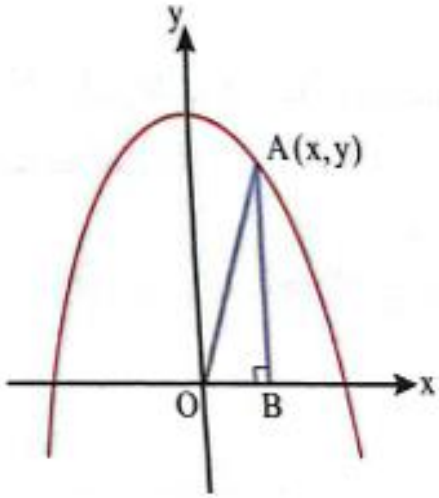
$y = 5x - 10$

$P = xy \rightarrow P = x(5x - 10)$

$5x^2 - 10x$

$P' = 10x - 10 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = -5$

مطابق شکل زیر، نقطهٔ A در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات، روی منحنی $y = 12 - x^2$ قرار دارد. با استفاده از جدول تغییرات، مختصات نقطهٔ A را بیابید که مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.



$S = \frac{1}{2} x \times y$

$S = \frac{1}{2} x (12 - x^2)$

$S = \frac{1}{2} (12x - x^3)$

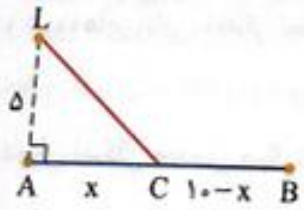
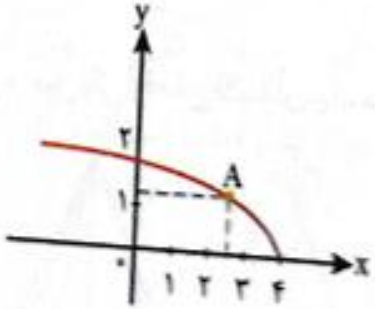
$S' = \frac{1}{2} (12 - 3x^2) = 0 \rightarrow x = 2$

$S_{max} = \frac{1}{2} \times 2 \times 8 = 8$

یک استوانه را در یک کره به شعاع ۳ واحد محاط کرده‌ایم. بیشترین حجم این استوانه چه‌قدر است؟

یک استوانه را در یک مخروط به شعاع ۳ و ارتفاع ۶ سانتی‌متر محاط کرده‌ایم. بیشترین حجم این استوانه چه‌قدر است؟

چراغ دریایی L در یک جزیرهٔ کوچک و در ۵ کیلومتری نقطهٔ A، در ساحل قرار دارد. می‌خواهیم از L به نقطهٔ B در ساحل که در ۱۰ کیلومتری A قرار دارد، کابل بکشیم. اگر هزینهٔ کابل‌کشی از L به C (در زیر آب) برای هر کیلومتر، ۵ میلیون و از C به B (در ساحل) برای هر کیلومتر، ۳ میلیون باشد، نقطهٔ C را کجا انتخاب کنیم تا هزینهٔ کابل‌کشی مینیمم شود؟



در شکل زیر، نقطهٔ A را روی منحنی $y=\sqrt{4-x}$ انتخاب کرده‌ایم. مختصات نقطهٔ A را به‌گونه‌ای بیابید که مساحت مستطیل ایجادشده، بیشترین مقدار ممکن باشد.